# 1-1 數列及其極限

在一個無窮數列$\langle a_n \rangle$中，

- **收斂數列**：若隨著項數n的增加，$\langle a_n \rangle$越來越靠近一個穩定值時$\alpha$稱此數列收斂或說極限值為$\alpha$，記做 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$
  常數數列$\langle c \rangle$是一個收斂數列
- **發散數列**：若隨著項數n的增加，$\langle a_n \rangle$無法得到穩定值時，稱此數列發散，**極限值不存在**

跳動數列$\langle (-1)^n \rangle$只在$-1$和1上依序跳動，它不會趨近一個定數，因此數學上還是視它為**發散數列**。

## ＊無窮等比級數 $\langle ar^{n-1} \rangle$，設 $a\neq 0$

① $r>1 \Rightarrow$ 發散數列，極限值不存在
② $r=1 \Rightarrow$ 收斂數列，極限值 $=a$
③ $0<r<1 \Rightarrow$ 收斂數列，極限值 $=0$
④ $r=0 \Rightarrow$ 收斂數列，極限值 $=0$
⑤ $-1<r<0 \Rightarrow$ 收斂數列，極限值 $=0$
⑥ $r=-1 \Rightarrow$ 發散數列，極限值不存在
⑦ $r<-1 \Rightarrow$ 發散數列，極限值不存在

☆ 等比數列、級數收斂發散比較

| | 等比數列 | 等比級數 |
|---|---|---|
| $r>1$ | 發散，極限值不存在 | 發散，極限值不存在 |
| $r=1$ | 收斂，極限值 $=1$ | 發散，極限值不存在 |
| $0<r<1$ | 收斂，極限值 $=0$ | 收斂，極限值 $=\frac{a}{1-r}$ |
| $r=0$ | 收斂，極限值 $=0$ | 收斂，極限值 $=\frac{a}{1-r}$ |
| $-1<r<0$ | 收斂，極限值 $=0$ | 收斂，極限值 $=\frac{a}{1-r}$ |
| $r=-1$ | 發散，極限值不存在 | 發散，極限值不存在 |
| $r<-1$ | 發散，極限值不存在 | 發散，極限值不存在 |

## ＊數列之性質

(1) 斂散性：收斂、發散……

(2) 唯一性：若$\langle a_n \rangle$收斂，則其極限值只有一個

(3) 若$\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$均收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$，則

① $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha-\beta$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n / \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{\alpha}{\beta}$

$\langle b_n \rangle$各項均不為0，$\beta\neq 0$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c\alpha$

＊以上5點其逆敘述不真

## ＊夾擠定理

設$\langle a_n \rangle\langle b_n \rangle\langle c_n \rangle$為無窮數列，且對於所有正整數n，$b_n\le a_n\le c_n$均成立。若$\langle b_n \rangle$, $\langle c_n \rangle$均收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$，則數列$\langle a_n \rangle$收斂且 $\lim\limits_{n\to\infty}=L$

## ＊無窮級數之和

無窮級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots a_n+\cdots$，前n項總和為 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S_\infty=\alpha$ (定值) $\Rightarrow$ 收斂級數

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S_\infty=\infty \Rightarrow$ 發散級數

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S_\infty=-\infty \Rightarrow$ 發散級數

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S_\infty=$ 不確定 $\Rightarrow$ 發散級數

## ＊無窮等比級數

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a[1-r^n]}{1-r}$

$=$ ① $|r|<1 \Rightarrow \frac{a}{1-r} \Rightarrow$ 收斂

② $r>1 \Rightarrow \infty$

③ $r=1 \Rightarrow \infty$

④ $r\le -1 \Rightarrow$ 振盪

②③④ 發散

＊性質：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$均收斂，且c表示為一常數

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)=c\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+9}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\times\frac{(\sqrt{n+9}-\sqrt{n})(\sqrt{n+9}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+9}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\cancel{n}+9-\cancel{n})}{\sqrt{n+9}+\sqrt{n}}$

$=\frac{9\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{9}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=0$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{6^n}+\frac{3^n}{6^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n+5^n}{30^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{15^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{6^n}$

$=\frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{15}}+\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}+\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{14}+\frac{1}{9}+\frac{1}{5}$

$=\frac{45+70+126}{630}=\frac{241}{630}$

$45$
$70$
$126$
$241$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n}{n+1}-\frac{n^2+n}{n-1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n[(n-1)^2-(n+1)^2]}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n)(-2)}{n^2-1}$

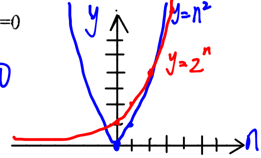
$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2}{n^2-1}=-4$

試利用夾擠定理證明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$

當 $n\geq 4$ 時 $2^n>n^2>0$

$\Rightarrow 0<\frac{n}{2^n}<\frac{n}{n^2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$




試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=0$

$\left(\frac{10}{n}\right)^n<\frac{10^n}{n!}=\frac{10^n}{n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1}<\frac{10^n}{n^{n-1}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n^n}=0$
$\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n^{n-1}}=0$ ] 由夾擠定理可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=0$

2.坐標平面上，x坐標與y坐標均為整數的點稱為格子點。令n為正整數，$T_n$為平面上以直線 $y=\frac{-1}{2n}x+3$，以及x軸、y軸所圍成的三角形區域(包含邊界)，而$a_n$為$T_n$上的格子點數目，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=$ 12 。

$y=\frac{-1}{2n}x+3$

$x+2ny=6n$

$y=0$ : $x=6n\Rightarrow$ 格子點數 $=6n+1$

$y=1$ : $x=4n\Rightarrow$ 格子點數 $=4n+1$

$y=2$ : $x=2n\Rightarrow$ 格子點數 $=2n+1$

$y=3$ : $x=0\Rightarrow$ 格子點數 $=1$

$\Rightarrow a_n=6n+1+4n+1+2n+1+1=12n+4$

$\lim_{n\to\infty}\frac{12n+4}{n}=12$

設數列<$a_n$>定義為 $a_n=\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$，試求 $\lim_{n\to\infty}a_n=$ $\frac{1}{2}$ 。

$\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}\leq a_n\leq\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}=\frac{1}{2}$
$\lim\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}=\frac{1}{2}$ ] 由夾擠定理可知，$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

3.一盒子裡有n(n>3)顆大小相同的球，其中有1顆紅球、2顆藍球以及n-3顆白球。從盒子裡隨機同時抽取3球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為2n分、n分及1分，若所得分數的期望值為$E_n$，則 $\lim_{n\to\infty}E_n=$ 15 。

① 方法1：

[ 總分數: $1\times2n+2\times n+(n-3)\times1=2n+2n+n-3=5n-3$

4.設 $a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$，則：(1)試證：$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{n(n+3)}{2}$。(2)試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=$ $\frac{1}{2}$ 。

(1) $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2}<a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(k+1)^2}$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}k<a_n<\sum_{k=1}^{n}(k+1)\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(2+n+1)n}{2}$

$\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{n(n+3)}{2}$

(2) $\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{n(n+3)}{2}\Rightarrow\frac{1+\frac{1}{n}}{2}<\frac{a_n}{n^2}<\frac{1+\frac{3}{n}}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$
$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{2}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 由夾擠定理可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$

將分數 $\frac{16241}{49950}$ 化為小數時，小數點後第51位數字為？5

$10\,|\,49950$
$5\,|\,4995$
$999$

$\Rightarrow\frac{16241}{9990\times5}=\frac{16241\times2}{9990\times5\times2}=\frac{32482}{99900}$

$=0.32\overline{514}$

$482+32=514$

$51-2=49\quad 49\div3=16\cdots1$

n為正整數，若一無窮等比級數前n項的和為24，前2n項的和為42，則此無窮等比級數的和為 96 。 [這是智力測驗]

$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=24$

$S_{2n}=\frac{a_1(1-r^{2n})}{1-r}=42$

$\Rightarrow\frac{42}{24}=\frac{7}{4}=\frac{1-r^{2n}}{1-r^n}=1-r^n$

$\Rightarrow r^n=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$

$\frac{a_1}{1-r}=\frac{24}{1-r^n}=\frac{24}{1-\frac{3}{4}}=24\times4=96$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}+\cdots=\underline{\ 2\ }。$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cdots\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}+\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{1}{n+1}}+\cdots\right)$$

$$=2(1+0)=2$$

---

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{4a_n+1}=\frac{3}{2}$$

$b_n=\dfrac{3a_n-2}{4a_n+1}$ $\quad 4b_na_n+b_n=3a_n-2$

$$a_n=\frac{b_n+2}{3-4b_n}=\frac{\frac{3}{2}+2}{3-6}=\frac{\frac{7}{2}}{-3}=\frac{-7}{6}$$

設 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{3n^2+k}$，則 $\lim_{n\to\infty}S_n=?$

*夾擠定理

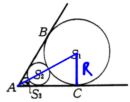
$\dfrac{n}{3n^2+1}>\dfrac{n}{3n^2+2}>\cdots>\dfrac{n}{3n^2+n}$

$\Rightarrow \dfrac{n}{3n^2+1}<S_n<\dfrac{n}{3n^2+n}$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n^2+n}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{3}$

---




'. 如右圖，$\angle BAC=60°$，最大圓($S_1$)面積為k，作出無數互相外切之圓：(1)$S_2$半徑：$S_1$半徑=$\underline{1:3}$。(2)試求這些圓之面積總和(以k表之)$\underline{\frac{9}{8}k}$。(3)同右圖，若第5個圓之圓周長為10cm，求所有圓之周長總和 $\underline{1215cm}$。

(1) 設 $S_1$半徑 $=R$，$S_2$半徑 $=r$

$\Rightarrow \overline{AS_1}=2R$ $\Rightarrow \overline{AS_2}=2r$

$S_1$，$S_2$ 連心線長 $=R+r=2R-2r$

$\Rightarrow R=3r$ $\quad r:R=1:3$

(2) $k\left(1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\cdots\right)$

$=k\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{9}{8}k$

(3) $a_5=10=a_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$a_1=10\times81=810$

$810\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right)$

$=810\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=810\times\dfrac{3}{2}$

$=405\times3=1215$

---

設無窮等比級數 $2+\dfrac{4}{5}+\dfrac{8}{25}+\dfrac{16}{125}+\cdots+\dfrac{2^n}{5^{n-1}}+\cdots$ 之前n項和為$S_n$，此級數之和為S，則：(1)$S_n$=$\underline{\frac{10}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}$，S=$\underline{\frac{10}{3}}$。(2)欲使$|S-S_n|<\dfrac{1}{1000}$成立，則最小的自然數n為$\underline{9}$。

$a_1=2$
$r=\frac{2}{5}$

(1) $S_n=\dfrac{2\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{5}}=2\times\dfrac{5}{3}\times\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

$=\dfrac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

$S=\dfrac{2}{1-\frac{2}{5}}=2\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 3980\overline{)35229} \\ 31840 \\ \hline 9 \end{array}$$

(2) $\left|\frac{10}{3}-\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)\right|<\frac{1}{1000}$

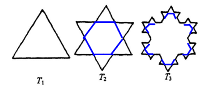
$\frac{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n<\frac{1}{1000}$ $\Rightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^n<\frac{3}{10000}$

$n(\log5-\log2)>4-\log3$

$n>\dfrac{4-0.4771}{0.6990-0.3010}=\dfrac{3.5229}{0.3980}=8\ldots$

---

14. 設$T_1$，$T_2$，$T_3$…為一群多邊形，其作法如下：$T_1$為邊長等於1之正三角形；以$T_n$每一邊中間三分之一的線段為一邊向外作正三角形，然後將該三分之一線段抹去所得的多邊形為$T_{n+1}$，n=1，2，…(如圖所示)，令$a_n$表$T_n$的周長，請計算$T_3$之面積及$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$之和 $\frac{10}{27}\sqrt{3}$ $\rightarrow\frac{4}{3}$




(1) $T_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$T_2=T_1+3\times\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$，$T_3=$ $T_3=T_1+T_2+6\times2\times\frac{1}{81}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow T_3=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{27}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{27+9+4}{27}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{40}{27}=\frac{10}{27}\sqrt{3}$

(2) $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{a_2}=\frac{1}{4}\end{array}\right)\times\frac{3}{4}$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\times4=\frac{4}{3}$

---

. 試求 $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}=\underline{\ 1\ }$。

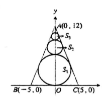
$=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{(k+1)k}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}\times\sqrt{1}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}+\cdots\cdots$

$=1-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\cdots\cdots$

$=1$

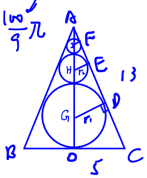
---

13. 如右圖，在△ABC中作內切圓$S_1$再作圓$S_2$切圓$S_1$以及$\overline{AB}$、$\overline{AC}$兩邊，再作圓$S_3$切圓$S_2$以及$\overline{AB}$、$\overline{AC}$兩邊。如此繼續作下去，得圓數列$S_1$，$S_2$，$S_3$，…，設其面積分別為$A_1$，$A_2$，$A_3$，…，。




(1)求$A_1$。(2)求無窮級數$A_1+A_2+A_3+\cdots$的和。$\rightarrow\frac{180}{13}\pi$

$\frac{100}{9}\pi$




(1) $\triangle AOC\sim\triangle ADG$

$\Rightarrow\dfrac{r_1}{5}=\dfrac{12-r_1}{13}$ $\quad 13r_1=60-5r_1$

$18r_1=60\Rightarrow r_1=\frac{10}{3}$ $\quad A_1=\left(\frac{10}{3}\right)^2\pi=\frac{100}{9}\pi$

(2) $\triangle AEH\sim\triangle AOC$

$\dfrac{r_2}{5}=\dfrac{12-\frac{20}{3}-r_2}{13}$ $\quad 13r_2=60-\frac{100}{3}-5r_2$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l}r_1:\frac{10}{3}\\ r_2:\frac{40}{27}\end{array}\right)\times\frac{4}{9}$

$18r_2=\frac{80}{3}$ $\quad r_2=\frac{40}{27}$

$\Rightarrow A_1+A_2+\cdots\cdots=\frac{100}{9}\pi\left(1+\frac{16}{81}+\left(\frac{16}{81}\right)^2+\cdots\cdots\right)=\frac{100}{9}\pi\times\dfrac{1}{1-\frac{16}{81}}=\frac{\cancel{100}^{20}}{\cancel{9}}\pi\times\frac{\cancel{81}^{9}}{\cancel{65}_{13}}=\frac{180\pi}{13}$

---

.( )在實數線上，動點A從原點開始往正向移動，動點B從8的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒A、B移動的距離分別為1、4，且A、B每次移動的距離分別為其前一次移動距離的$\frac{1}{2}$倍、$\frac{1}{3}$倍。令$C_n$為第n秒時A、B的中點位置。請選出正確選項。(1)$C_1=2.5$ (2)$C_2>C_1$ (3)數列<$C_{n+1}-C_n$>是一個等比數列 (4)$\lim_{n\to\infty}C_n=2$ (5)$C_{1000}>2$。

$A_n$：$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots$ $\quad\Rightarrow\lim_{n\to\infty}A_n=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ $\quad S=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$B_n$：$8-4\left[1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}B_n=8-4\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=2$ $\quad S=\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$

✓(1) $C_1=\frac{1}{2}(1+4)=\frac{5}{2}$

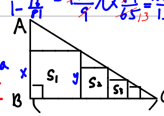
(2) $C_2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{8}{3}\right)=\frac{25}{12}<C_1$

(3) $C_n=\frac{1}{2}\left[2\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$

---

$\angle A=60°$，$\angle B=30°$，$\overline{BC}=a$，求$S_1+S_2+\cdots\cdots$




設$S_1$邊長x，$S_2$邊長y

$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}a-x}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$(1+\sqrt{3})x=a$，$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)a}{2}$ $\quad\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)a-y}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad(1+\sqrt{3})y=\dfrac{(3-\sqrt{3})a}{2}$ $\quad y=\dfrac{(3-\sqrt{3})a}{2(1+\sqrt{3})}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)(3-\sqrt{3})a}{4}$ $\quad\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{12-6\sqrt{3}}{4}=\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$

$S_1=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2a^2=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{(2-\sqrt{3})a^2}{2}$

$S_1+S_2+\cdots\cdots=\dfrac{(2-\sqrt{3})a^2}{2}\left(\dfrac{1}{1-\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}\right)=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2a^2}{3\sqrt{3}-4}=\dfrac{(2-\sqrt{3})(3\sqrt{3}+4)}{11}a^2$

$=\dfrac{(2\sqrt{3}-1)a^2}{11}$

A：$\dfrac{(2\sqrt{3}-1)a^2}{11}$