1-3 函數的極限

* 函數極限的意義:

(1) 設函數 $f(x)$，當 x 趨近於 a 時 $(x\neq a)$ 時，$f(x)$ 趨近於定數 L，則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處極限值為 L，記為 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

(2) 左極限 and 右極限

① 左極限：當 x 由 a 的左邊愈來愈接近 a 時，若函數 $f(x)$ 的值會趨近於某一固定值 L_1，則稱 L_1 為函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 時的左極限，即當 $x<a$ 而 $x\to a$ 時，以 $x\to a^-$ 表示，$f(x)$ 在 $x=a$ 的左極限記為 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_1$

② 右極限：當 x 由 a 的右邊愈來愈接近 a 時，若函數 $f(x)$ 的值會趨近於某一固定值 L_2，則稱 L_2 為函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 時的右極限，即當 $x>a$ 而 $x\to a$ 時，以 $x\to a^+$ 表示，$f(x)$ 在 $x=a$ 的左極限，記為 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_2$

(3) 極限存在：

$$\left[\begin{array}{l} 若 \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L，則 \lim\limits_{x\to a} f(x)=L \\ 若 \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a^+} f(x)，則 \lim\limits_{x\to a} f(x)\ 不存在 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不一定會存在，但 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在時，其值必唯一

* 函數極限的基本運算性質：

設函數 $f(x)$、$g(x)$ 的極限都存在，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\beta$，$k$=常數

則：

- $\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f(x))=k\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\alpha$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha\pm\beta$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} f(x)/\lim\limits_{x\to a} g(x)=\dfrac{\alpha}{\beta}\quad(\beta\neq 0)$
- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt{\alpha}\quad(\alpha\geq 0)$

註：

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，則 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$ 必存在 (其逆不真)

* 函數極限的求法：

①直接代入 ②去分母 ③夾擠原理 ④有理化分子分母

☆ 分母極限為 0，分子極限 $\neq 0 \Rightarrow$ 極限值不存在

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-1|-1}{x}$ = 不存在

① $x>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x}$

⇒ 極限值不存在

② $x<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$ $*\ a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+x^{\frac{2}{3}})(1-x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}-x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}})}{(1+\sqrt[5]{x})(1-\sqrt[3]{x}+x^{\frac{2}{3}})(1-x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}-x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}})}$

$\dfrac{\cancel{(1+x)}(1-x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}-x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}})}{\cancel{(1+x)}(1-\sqrt[3]{x}+x^{\frac{2}{3}})}\ \dfrac{1+1+1+1+1}{1+1+1}=\dfrac{5}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\log_2 x}$

$\log_2 x$ 為遞增函數，趨近 $-\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\log_2 x}=0$

A: 0

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1)}}{\cancel{\sqrt{x}}(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\dfrac{1}{2}$

A: $\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)^{100}-1}{x+2}\Rightarrow \lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t^{100}-1}{t+1}$

$=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{\cancel{(t+1)}(t^{99}-t^{98}+t^{97}-t^{96}+\cdots-1)}{\cancel{(t+1)}}$

$=-1-1-1-1\cdots\cdots-1$

$=-100$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^6-1}{x-2}$ 設 $x-2=t$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t+1)^6-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^6+6t^5+15t^4+20t^3+15t^2+6t+1-1}{t}=6$

② 設 $x-1=t$

$\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^6-1}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)}{t-1}=6$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+4}{n-2}=2,\ (a,b)=?$

$a\neq 0 \Rightarrow$ 極限值不存在

$a=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{bn+4}{n-2}=2$

$\Rightarrow b=2$

A: $(a,b)=(0,2)$

$\lim\limits_{n\to 2}\dfrac{an^2+bn+4}{n-2}=2,\ (a,b)=?$ $(2,-6)$

$\lim\limits_{n\to 2}\dfrac{(n-2)(an-2)}{n-2}=2$ $2a-2=2$ $a=2$

$an^2-(2a+2)n+4=2$ $b=-6$

A: $(a,b)=(2,-6)$

函數 $h(x)=\sqrt{10-x-3|x-2|}$ 之定義域為

$10-x-3|x-2|\geq 0$

$x\geq 2:\ 10-x-3x+6\geq 0,\ 4x\leq 16\ \ x\leq 4$

$x<2:\ 10-x+3x-6\geq 0\ \ 2x\geq -4\ \ x\geq -2$

$\{x\,|\,2\leq x\leq 4\}$

已知 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$，則 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=?$ $\dfrac{1}{2}$

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

$1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta$

$1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2$

$=\dfrac{1}{2}\times 1^2=\dfrac{1}{2}$

A: $\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x})^2}=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times 1^2=\dfrac{1}{2}$

$\because$ 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=?$

設 $t=-x>0$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0^-}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-t\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}\right)$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}-\sqrt{t^2+1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-x}{|x|-x^2}$ = 不存在

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-x}{|x|-x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{0}{x-x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-x}{|x|-x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-x}{-x-x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{x(-1-x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{-1-x}=\dfrac{-2}{-1}=2$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1-x^{20}}{1-x}-20\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{\cancel{(1-x)}(x^{19}+x^{18}+\cdots+x+1)-20}{\cancel{1-x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{19}+x^{18}+x^{17}+\cdots+x^2+x-19}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{19}-1)+x^{18}+x^{17}+x^{16}+\cdots+x-18}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\cancel{(1-x)}(x^{18}+x^{17}+\cdots+1)+x^{18}+x^{17}+\cdots-18}{\cancel{1-x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}-19=$

3. (A B D) 設 f(x) 為一實係數多項式，且 f(x) 除以 $(x-1)(x-2)^2$ 的餘式為 $(x-2)^2+g(x)$，其中 g(x) 為一次多項式。請選出正確的選項。(A)若知道 f(1) 及 f(2)，則可求出 g(x) (B)f(x) 除以 (x-2) 的餘式是 g(2) (C)f(x) 除以 (x-1) 的餘式是 g(1) (D)f(x) 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 g(x) (E)f(x) 除以 (x-1)(x-2) 的餘式是 (x-2)+g(x)。

$f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-2)^2+g(x)$

(A) 設 $g(x)=ax+b$

$f(1)=1+a+b$ ⇒ 可求出 g(x)

$f(2)=2a+b$

(B) $f(2)=g(2)$

(C) $f(1)=1+g(x)$

(D) $f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-2)^2+g(x)=(x-2)^2[(x-1)Q(x)+1]+g(x)$

除 商 餘

(E) $f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x^2-4x+4)+g(x)$

$=(x-1)(x-2)[(x-2)Q(x)]+[(x-1)(x-2)-x+2]\,g(x)$

$=(x-1)(x-2)\,[(x-2)Q(x)+1]+(-x+2)+g(x)$

除 商 餘

10. 設 x 的多項式 f(x) 有下列性質：

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=24,\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=-20,\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=60$。(1)若 f(x) 被 (x-1)(x-2)(x-3) 除之所得商式為 g(x)，則 g(1)= 12。(2)g(x) 被 (x-1)(x-2)(x-3) 除之所得餘式為 x^2+5x+6。

(1) $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)g(x)$ $\lim\limits_{x\to 1}(x-2)(x-3)g(x)=24$

$-1\times -2\,g(1)=24$ $g(1)=12$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)(x-3)g(x)=-20\Rightarrow g(2)=20$ $\lim\limits_{x\to 3}(x-1)(x-2)g(x)=60\Rightarrow g(3)=30$

$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$

$g(1)=12=c$

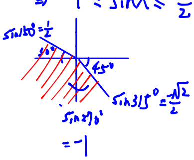
$g(2)=20=b+12$ $b=8$ ⇒ 餘式 $=(x-1)(x-2)+8(x-1)+12$

$g(3)=30=2a+16+12$ $a=1$ $=x^2+5x+6$

設 $\{x\,|\,\frac{5}{6}\pi\leq x\leq \frac{7}{4}\pi,\ x\in R\}$ 為函數 $f(x)=\dfrac{\sin x+2}{\sin x-2}$ 之定義域，則 f(x) 之值域為？

$150^\circ=\frac{5}{6}\pi\leq x\leq \frac{7}{4}\pi=315^\circ$

$\Rightarrow -1\leq \sin x\leq \dfrac{1}{2}$



$-1\leq \sin x\leq \dfrac{1}{2}$

$1\leq \sin x+2\leq \dfrac{5}{2}$

$-3\leq \sin x-2\leq -\dfrac{3}{2}$

$-\dfrac{5}{3}\leq \dfrac{\sin x+2}{\sin x-2}\leq -\dfrac{1}{3}$